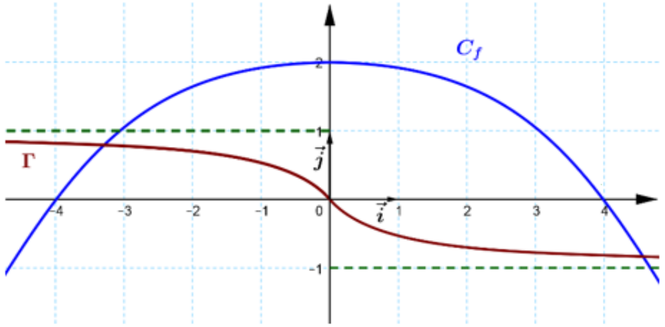
Exercice :

1°) Dans la figure ci-contre on donne C_f la courbe d'une fonction *f* dérivable sur IR, et Γ la courbe de f' (fonction dérivée de *f*).
On a tracer sur le graphique les asymptotes à Γ
(Droites en pointillés).
Montrer que $g: x \mapsto f(x)+x$ est croissante sur $[-4,4]$



2°) Soit (u_n) la suite définie sur *IN* par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + f(u_n), \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $0 \le u_n \le 4$.

b) Montrer que (u_n) est croissante.

c) Déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2°) Pour tout $n \in IN$, on pose : $v_n = \sum_{k=0}^{n} f(u_k)$. Montrer que $v_n = u_{n+1} - 1$ et déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

3°) Pour tout $n \in IN$, on pose : $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} + u_k$.

Montrer que pour tout $k \in IN$: $u_{k+1} + u_k \ge 2$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

1°) g est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$\forall x \in \mathbb{R}$; $g'(x) = f'(x) + 1$

ou $-1 \le f'(x) \le 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f'(x) + 1 \ge 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Ainsi $g(x)$ est croissante sur $[-4,4]$